DIDAXIS LAB

GUÍA DOCENTE · SIMULADOR INTERACTIVO DE MATEMÁTICAS

Laboratorio de Círculo Unitario y Ondas

Orientaciones curriculares para integrar el simulador en clases de Matemáticas de 10.° y 11.°, alineadas con los DBA V.2 (MEN) y la prueba Saber 11° (ICFES).

Grados 10° y 11° | Pensamiento variacional y trigonométrico | DBA 4 · Grado 10° · Principal | DBA 3 · Grado 10° · Articulación | DBA 3 · Grado 11° · Proyección | 45–60 min de exploración |

1 Objetivos de aprendizaje

- ✓ Comprender la relación geométrica entre el movimiento circular uniforme y las funciones trigonométricas seno y coseno.
- ✓ Calcular valores exactos de seno y coseno para ángulos notables (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, …) usando el círculo unitario.
- ✓ Identificar el papel de los parámetros A, B, C y D en la función general $y = A \cdot \text{sen}(B\theta + C) + D$.
- ✓ Modelar fenómenos periódicos del mundo real (péndulo, rueda de la fortuna, ondas, mareas) mediante funciones trigonométricas.
- ✓ Argumentar formalmente —no solo intuir visualmente— propiedades de las funciones trigonométricas como periodicidad y amplitud.

2 DBA asociados

DBA 4 · GRADO 10° · PRINCIPAL

> *"Comprende y utiliza funciones para modelar fenómenos periódicos y justifica las soluciones."*

Este es el DBA central del simulador. Todas las actividades y las tres preguntas ICFES apuntan a sus evidencias de aprendizaje.

DBA 3 · GRADO 10° · ARTICULACIÓN

> *"Resuelve problemas que involucran el significado de medidas de magnitudes relacionales (velocidad media, aceleración media) a partir de tablas, gráficas y expresiones algebraicas."*

Se articula con el simulador en el **modo péndulo** y en el análisis del cambio de amplitud y periodo, donde el estudiante interpreta tasas de variación a partir de la onda generada.

DBA 3 · GRADO 11° · PROYECCIÓN

> *"Utiliza instrumentos, unidades de medida, sus relaciones y la noción de derivada como razón de cambio, para resolver problemas, estimar cantidades y juzgar la pertinencia de las soluciones de acuerdo al contexto."*

El simulador prepara el terreno para el cálculo: la pendiente instantánea de la onda en $\theta = 0$ (que vale $\cos(0) = 1$) anticipa la derivada de sen(x).

3 Evidencias de aprendizaje

- Reconoce el significado de las razones trigonométricas seno, coseno y tangente en un triángulo rectángulo.
- Explora valores, condiciones y comportamientos en fenómenos periódicos a través de diferentes representaciones (algebraica, gráfica, geométrica).
- Calcula valores de seno y coseno para ángulos no agudos usando ángulos de referencia en el círculo unitario.
- Reconoce aplicaciones de las funciones trigonométricas en fenómenos diversos: movimiento circular, péndulo, pistón, ciclo de la respiración.
- Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.

4 Competencias matemáticas (ICFES Saber 11°)

Competencia	Peso ICFES	Cómo la desarrolla el simulador
Interpretación y representación	34 %	El estudiante lee y transforma información entre el círculo (representación geométrica) y la onda (representación algebraica y gráfica).
Formulación y ejecución	43 %	Diseña y ejecuta estrategias para construir funciones que modelen fenómenos reales (retos 2, 3 y 4 del simulador).
Argumentación	23 %	Justifica resultados, como la identidad pitagórica del reto 2 y la fórmula del periodo del reto 4.

5 Secuencia didáctica sugerida (90 minutos)

Inicio — Activación de saberes previos (10 min)

- **Pregunta detonadora:** «Si hago girar una linterna en círculos y la veo de perfil… ¿qué forma describe la luz?» (Respuesta esperada: una onda).
- Recordar la definición de razones trigonométricas en el triángulo rectángulo: SOH-CAH-TOA.
- Proyectar el simulador con $\theta = 0°$ y mover lentamente el deslizador hasta 90°. Pedir a los estudiantes que describan lo que ven.

Exploración — Manipulación guiada (30 min)

En parejas, los estudiantes acceden al simulador y completan una hoja de exploración:

- Llenan una tabla de valores de $\text{sen}(\theta)$ y $\cos(\theta)$ para $\theta = 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°$.
- Activan el modo «Mostrar valores exactos» y comparan sus resultados con las fracciones radicales.
- Modifican uno a uno los parámetros A, B, C, D y registran el efecto sobre la onda.
- Resuelven los 4 retos del panel derecho del simulador.

Discusión — Puesta en común (20 min)

- Socializar resultados de la tabla en el tablero (idealmente proyectando el simulador en pantalla grande).
- Discutir: ¿Por qué sen(150°) = sen(30°)? ¿Y por qué cos(150°) = −cos(30°)? (Concepto de ángulo de referencia y cuadrantes).
- Mostrar el modo Péndulo y debatir: ¿Por qué un péndulo se modela con coseno y no con seno en $t = 0$ cuando parte del reposo?
- Conectar con fenómenos reales: latido cardíaco, sonido, corriente alterna, mareas.

Evaluación — Síntesis y aplicación (30 min)

- Aplicar las 3 preguntas tipo ICFES (sección 7) como evaluación formativa individual.
- Cada estudiante justifica por escrito su elección de respuesta, identificando la evidencia de aprendizaje implicada.
- Retroalimentación grupal usando los distractores como punto de partida para discutir errores conceptuales.

6 Preguntas orientadoras para el aula

? ¿Por qué la hipotenusa en el círculo unitario siempre vale 1, y qué consecuencia tiene esto sobre las definiciones de seno y coseno?

? Si el punto P está en el segundo cuadrante, ¿qué signos tienen sus coordenadas? ¿Y entonces, qué signos tienen sen(θ) y cos(θ)?

? ¿Qué cambia visualmente si duplico A? ¿Y si duplico B? ¿Cuál de los dos modifica el periodo?

? ¿Por qué la tangente tiene asíntotas verticales en π/2 y 3π/2? ¿Qué le pasa al coseno allí?

? ¿Cómo se relaciona la velocidad del péndulo en el centro de oscilación con la pendiente de la onda en ese punto?

? ¿Qué fenómeno cotidiano cercano a ti puede modelarse con una función seno?

7 Preguntas tipo ICFES Saber 11° con retroalimentación

Una pregunta por cada competencia evaluada en la prueba de Matemáticas. Se presentan todos los distractores con retroalimentación específica para identificar el error conceptual subyacente.

PREGUNTA 1 · INTERPRETACIÓN Y REPRESENTACIÓN DBA 4 · Grado 10°

En el simulador, un punto P gira sobre un círculo unitario centrado en el origen. La proyección de P sobre el eje Y corresponde al valor del seno del ángulo θ, y la proyección sobre el eje X corresponde al valor del coseno. Un estudiante mueve el deslizador hasta colocar el ángulo en $\theta = 150°$.

De acuerdo con la posición del punto P sobre el círculo unitario cuando $\theta = 150°$, ¿cuáles son los valores exactos de sen(150°) y cos(150°)?

A $\text{sen}(150°) = 1/2$ y $\cos(150°) = -\sqrt{3}/2$

✓ **CORRECTA**

El ángulo de referencia de 150° es $180° - 150° = 30°$. En el segundo cuadrante el seno es positivo y el coseno es negativo: $\text{sen}(150°) = \text{sen}(30°) = 1/2$ y $\cos(150°) = -\cos(30°) = -\sqrt{3}/2$.

B $\text{sen}(150°) = \sqrt{3}/2$ y $\cos(150°) = -1/2$

✗ **Incorrecta**

Confundiste seno con coseno. El valor $\sqrt{3}/2$ corresponde al coseno del ángulo de referencia (30°), no al seno. Recuerda: el seno se lee en el eje Y y el coseno en el eje X.

C $\text{sen}(150°) = -1/2$ y $\cos(150°) = \sqrt{3}/2$

✗ **Incorrecta**

Invertiste los signos. El ángulo 150° está en el segundo cuadrante: seno positivo (proyección Y positiva) y coseno negativo (proyección X negativa).

D $\text{sen}(150°) = 1/2$ y $\cos(150°) = \sqrt{3}/2$

✗ **Incorrecta**

Olvidaste el signo del coseno. Aunque $\cos(30°) = \sqrt{3}/2$, el punto P está a la izquierda del eje Y, por lo tanto $\cos(150°) = -\sqrt{3}/2$.

Evidencia evaluada: Calcula valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.

PREGUNTA 2 · FORMULACIÓN Y EJECUCIÓN DBA 4 · Grado 10°

> Una rueda de la fortuna tiene radio 5 m y su centro se encuentra a 6 m del suelo. La rueda gira con periodo de 20 segundos. Un estudiante usa el simulador y configura una función del tipo $y = A\cdot\text{sen}(B\theta + C) + D$ para modelar la altura (en metros) de una cabina a lo largo del tiempo t (en segundos), suponiendo que en $t = 0$ la cabina está a la altura del centro y subiendo.

¿Cuál es la combinación correcta de parámetros A, B, C, D que modela esta situación?

A $A = 5$, $B = \pi/10$, $C = 0$, $D = 6$

> **✓ CORRECTA**
> Amplitud $A = 5$ (radio). Desplazamiento $D = 6$ (altura del centro). Periodo $2\pi/B = 20 \rightarrow B = \pi/10$. En $t = 0$ la cabina está en el centro y sube: $\text{sen}(0) = 0$ con pendiente positiva $\rightarrow C = 0$.

B $A = 6$, $B = \pi/10$, $C = 0$, $D = 5$

> **✗ Incorrecta**
> Intercambiaste amplitud y desplazamiento vertical. La amplitud A es el RADIO (5 m) y D es la altura del eje de oscilación (6 m).

C $A = 5$, $B = 20$, $C = 0$, $D = 6$

> **✗ Incorrecta**
> Confundiste el periodo ($T = 20$) con la frecuencia angular B. La relación es $T = 2\pi/B \rightarrow B = 2\pi/20 = \pi/10$. Con $B = 20$ el periodo sería ≈ 0.31 s.

D $A = 5$, $B = \pi/10$, $C = \pi/2$, $D = 6$

> **✗ Incorrecta**
> Con $C = \pi/2$ el modelo equivale a un coseno $[\text{sen}(\theta + \pi/2) = \cos(\theta)]$, lo cual situaría la cabina en el punto más alto en $t = 0$, no en la altura del centro.

Evidencia evaluada: Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.

PREGUNTA 3 · ARGUMENTACIÓN

DBA 3 · Grado 11°

Un estudiante afirma en clase: «Si una función periódica tiene un periodo de 4π, entonces su frecuencia angular B en la expresión $y = A \cdot \text{sen}(B\theta)$ es necesariamente $B = 1/2$». Para validarlo, usa el simulador y observa que efectivamente con $B = 0.5$ la onda completa un ciclo cada 4π unidades.

¿Cuál de los siguientes argumentos justifica MEJOR la afirmación del estudiante?

A Porque el simulador lo muestra visualmente y la observación experimental basta como justificación matemática.

✗ **Incorrecta**

Una observación visual es valiosa para conjeturar, pero no constituye una justificación matemática. La argumentación exige una demostración basada en propiedades formales.

B Porque el periodo T de $y = A \cdot \text{sen}(B\theta)$ cumple $T = 2\pi/B$; despejando B con $T = 4\pi$ se obtiene $B = 2\pi/(4\pi) = 1/2$.

✓ **CORRECTA**

La relación $T = 2\pi/B$ se demuestra de la definición de función periódica: $\text{sen}(B(\theta + T)) = \text{sen}(B\theta)$ exige $BT = 2\pi$. Con $T = 4\pi$: $B = 2\pi/(4\pi) = 1/2$. Justificación formal, general y deductiva.

C Porque cuando B disminuye, el periodo aumenta, por lo tanto $B = 1/2$ es el único valor posible.

✗ **Incorrecta**

La relación cualitativa «a menor B, mayor periodo» es correcta, pero no justifica el valor exacto $B = 1/2$. Falta la relación cuantitativa $T = 2\pi/B$. Razonamiento incompleto.

D Porque $B = 1/T$ y como $T = 4\pi$, entonces $B = 1/(4\pi)$.

✗ **Incorrecta**

Confundiste frecuencia angular con frecuencia ordinaria. La relación $B = 1/T$ es para la frecuencia f (en hertz). La correcta para funciones trigonométricas es $B = 2\pi/T$.

Evidencia evaluada: Reconoce aplicaciones de las funciones trigonométricas en fenómenos de variación periódica y justifica la pertinencia del modelo.

8 Errores conceptuales frecuentes y estrategias de intervención

⚠ Concepción 1: «Seno y coseno solo existen para ángulos agudos»

Origen: el primer encuentro con trigonometría suele ser SOH-CAH-TOA en triángulos rectángulos.

Estrategia: usar el simulador para extender el concepto al círculo unitario, mostrando que seno y coseno se definen para CUALQUIER ángulo (incluso negativos o mayores a 360°).

⚠ Concepción 2: «sen(60°) = √3/2 es una memorización mágica»

Origen: aprendizaje mecánico de la tabla de valores notables.

Estrategia: derivar el valor visualmente con el triángulo equilátero inscrito en el círculo unitario. El seno es una altura geométrica, no un número arbitrario.

⚠ Concepción 3: «El periodo y la amplitud son lo mismo»

Origen: ambos conceptos se introducen simultáneamente sin diferenciación clara.

Estrategia: modificar SOLO A (amplitud) mientras B se mantiene fijo, y luego invertir el ejercicio. Que el estudiante verbalice la diferencia.

⚠ Concepción 4: «La frecuencia angular B se mide en hertz»

Origen: confusión con la frecuencia ordinaria de la física.

Estrategia: enfatizar que B se mide en rad/unidad y que la relación con el periodo es $T = 2\pi/B$, no $T = 1/B$.

⚠ Concepción 5: «$\text{sen}(\theta + 2\pi) \neq \text{sen}(\theta)$ porque el ángulo es distinto»

Origen: visión estática del ángulo como una medida fija, no como una posición sobre el círculo.

Estrategia: en el simulador, mover θ de 0 a 720° y mostrar que el punto P pasa exactamente por las mismas posiciones; la función se REPITE.

⚠ **Concepción 6: «$sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ solo se cumple en ángulos especiales»**

Origen: aprendizaje de la identidad pitagórica solo como una fórmula sin conexión geométrica.

Estrategia: mostrar en el simulador que el punto P siempre está sobre el círculo de radio 1, y aplicar el teorema de Pitágoras a sus coordenadas (cos θ, sen θ).

9 Extensiones para profundización

→ Investigar la transformación de Fourier: ¿cómo se descompone una onda compleja (música, voz) en sumas de senos y cosenos?

→ Construir un péndulo físico real (con un peso y una cuerda) y comparar empíricamente su periodo con el predicho por $T = 2\pi\cdot\sqrt{L/g}$.

→ Modelar la altura de las mareas en una bahía colombiana usando datos reales del IDEAM y ajustar una función $y = A\cdot sen(Bt + C) + D$.

→ Conectar con la física: estudiar las funciones trigonométricas en el contexto de Movimiento Armónico Simple (MAS).

→ Introducir la fórmula de Euler $e^{i\theta} = cos(\theta) + i\cdot sen(\theta)$ como puente al pensamiento matemático universitario.

→ Programar el simulador en Python con matplotlib (proyecto STEAM transdisciplinar matemáticas-tecnología).

10 Soluciones de las preguntas ICFES (clave docente)

Pregunta 1 **Respuesta: A**

El ángulo de referencia para θ = 150° es 180° − 150° = 30°. En el segundo cuadrante el seno es positivo y el coseno es negativo. Por lo tanto:

- sen(150°) = +sen(30°) = **1/2**
- cos(150°) = −cos(30°) = **$-\sqrt{3}/2$**

Evalúa: «Calcula valores de las razones seno y coseno para ángulos no agudos, auxiliándose de ángulos de referencia inscritos en el círculo unitario.»

Pregunta 2 Respuesta: A

Para modelar la altura de la cabina de la rueda de la fortuna:

- Amplitud A = radio = **5 m**
- Desplazamiento vertical D = altura del centro = **6 m**
- Periodo $T = 20$ s → $T = 2\pi/B$ → $\mathbf{B = \pi/10}$
- En $t = 0$, cabina en el centro y subiendo: $\mathrm{sen}(0) = 0$ con pendiente positiva → $\mathbf{C = 0}$

Modelo: $y(t) = 5 \cdot \mathrm{sen}((\pi/10) \cdot t) + 6$

Evalúa: «Modela fenómenos periódicos a través de funciones trigonométricas.»

Pregunta 3 Respuesta: B

La justificación formal parte de la definición de función periódica: $\mathrm{sen}(B(\theta + T)) = \mathrm{sen}(B\theta)$ exige $BT = 2\pi$. De allí la relación general $T = 2\pi/B$. Sustituyendo $T = 4\pi$:

$$\mathbf{B = 2\pi / 4\pi = 1/2}$$

La opción A es incorrecta porque la observación visual no es justificación matemática. La C es incompleta (solo cualitativa). La D confunde frecuencia angular (B) con frecuencia ordinaria ($f = 1/T$).

El simulador no reemplaza el cuaderno ni el tablero: los potencia. Al permitir que el estudiante MANIPULE la matemática en tiempo real, transforma los conceptos abstractos —periodicidad, amplitud, fase— en intuiciones corporales y visuales. Su uso en aula es más eficaz cuando va acompañado de momentos de pausa, formalización escrita y discusión argumentativa: los tres pilares que evalúa el ICFES Saber 11°.

— Didaxis Lab · Aprender es descubrir —